反应扩散方程的经典行波解

娄本东 (上海师范大学)

Email: lou@shnu.edu.cn

1. 引言

在弦振动、反应扩散、曲率流、KdV等类型的发展方程中，经常可以观察到**行波解(traveling wave solution)** 的存在. 传统意义上的行波解是指波形、波速都不变的一类解. 在反应扩散方程领域，这类解的研究出现于 1937 年. 另一方面，从 1980年代开始，人们也大量研究了空间和/或时间非均匀环境中反应扩散方程的**广义行波解**. 行波解虽然只是一个方程的众多解当中的一个特殊类型，但是由于它们通常具有某种稳定性，在许多情况下都表征了（无界区域中的）解演化为稳定态的中间过程，因此，在自然界和自然科学中经常被观察到，在数学上也被关注和研究. 本讲义将介绍反应扩散方程传统意义下的行波解，为了与广义行波解相区别，称之为**经典行波解**.

考虑如下反应扩散方程

$$u_t = u_{xx} + f(u), \qquad x \in \mathbb{R},\ t > 0, \tag{E}$$

其中 $f(u)$ 在 $[0,\infty)$ 上是 C^1 的（可以减弱为 Lipschitz 的），又假设 $f(0)=0$. 最典型的例子是以下三种类型，即**单稳态型** (monostable type, 也称为 positive type)：

$$\begin{cases} f(0)=f(1)=0, \quad f'(0)>0, \quad f'(1)<0, \\ f(u)>0\ (\forall\ u\in(0,1)), \quad f(u)<0\ (\forall\ u>1); \end{cases} \tag{f_M}$$

双稳态型 (bistable type)：存在 $\theta\in(0,1)$ 使得

$$\begin{cases} f(0)=f(\theta)=f(1)=0, \quad f'(0)<0, \quad f'(1)<0, \quad \int_0^1 f(s)ds>0, \\ f(u)<0\ (\forall\ u\in(0,\theta)\cup(1,\infty)), \quad f(u)>0\ (\forall\ u\in(\theta,1)); \end{cases} \tag{f_B}$$

燃烧型 (combustion or ignition type)：存在 $\theta\in(0,1)$ 使得

$$\begin{cases} f(u)=0\ (\forall\ u\in[0,\theta]), \quad f'(1)<0, \\ f(u)>0\ (\forall\ u\in(\theta,1)), \quad f(u)<0\ (\forall\ u>1). \end{cases} \tag{f_C}$$

在单稳态型中又有一类特殊的所谓 **Fisher-KPP 型**，即 f 还满足:

$$f(u)\leqslant f'(0)u\ (\forall\ u\geq 0), \quad \text{或} \quad \frac{f(u)}{u} \text{ 关于 } u>0 \text{ 是单调递减的.} \tag{F-KPP}$$

(此名称的由来是因为 Fisher [5] 和 Kolmogorov 等人[6] 于 1937 年最早研究了这类问题).

除了以上这些典型的非线性项，近年来也有许多研究是关于多稳态、时间和/或空间非均匀反应项的，本讲义只考虑上述几种最典型最简单的反应项，而且只介绍行波解的问题.

经典行波解是方程 (E) 的形如 $u(x,t)=q(x-ct)$ 的解. 因此，一个充分必要条件是 (c,q) 满足如下常微分方程：

$$q''(z)+cq'(z)+f(q)=0,\quad z\in\mathbb{R}. \tag{TWE}$$

此外，为了表达行波解连接两个特定的平衡态，通常需要附加 q 在 $\pm\infty$ 处的边界条件，如：

$$q(-\infty)=0,\quad q(+\infty)=1. \tag{TWBC}$$

本讲义介绍研究行波解的两个方法：相平面法和打靶法(前者主要取材于 [1, 7] 等，后者主要取材于 H. Berestycki 的报告 [2]).

2. 相平面方法

$\boxed{\text{写作中}}$

3. 打靶法

$\boxed{\text{草稿}}$ 本节利用打靶法构造行波解. 考虑前面的问题 (TWE)-(TWBC):

$$\begin{cases} q''(z)+cq'(z)+f(q)=0, & z\in\mathbb{R},\\ q(-\infty)=0, \quad q(\infty)=1. \end{cases} \tag{TF}$$

3.1. 有限区间上的问题. 取 $a\geqslant 1$，考虑区间 $[-a,a]$ 上的问题

$$\begin{cases} q''(z)+cq'(z)+f(q)=0, & z\in[-a,a],\\ q(-a)=0, \quad q(a)=1. \end{cases} \tag{TF$_a$}$$

引理 3.1. (i) 对于任何 $c\in\mathbb{R}$，问题 $(\mathrm{TF})_a$ 存在唯一解 $q=q_{a,c}$，它满足 $0<q<1$，$q'>0$；

(ii) $q_{a,c}(z)$ 关于 c 是单调增加且连续的，而且存在唯一的 $c=c(a)$ 使得 $q_{a,c}(0)=\theta$ (对单稳情形记 $\theta=\frac{1}{2}$).

证明: (i). 显然 $q\equiv 1$ 为问题 $(\mathrm{TF})_a$ 的上解，$q\equiv 0$ 为其下解，由经典的上下解方法（例如：[7, 定理 2.3.2]）可得 q 的存在性，结合极值原理可得 $0<q(z)<1$ $(z\in(-a,a))$.

下面用滑动法（sliding method）证明单调性（参见[3]）. 设 $q(z)$ 是 $(\mathrm{TF})_a$ 的一个解，对任何 $h\in[0,2a)$，考虑 $q(z)$ 的平移函数 $q_h(z):=q(z-h)$，它定义于 $[-a+h,a+h]$，

与 $q(z)$ 有公共定义域 $[-a+h,a]$. 显然当 $2a-h>0$ 充分小时，有

$$q_h(z) < q(z), \quad z \in [-a+h,a]. \tag{3.1}$$

先证明 $q' \geqslant 0$. 否则就存在 $z_1 < z_2$，使得 $q(z_1) > q(z_2)$. 于是在保持 (3.1) 成立而逐渐减小 h 的滑动过程中，必存在 $h_1 > 0$ 使得 $q_{h_1}(z) \leqslant q(z)$ 且等号在某一点 z_3 处成立，由椭圆方程的极值原理即得矛盾. 具体地说，令 $\eta(z) := q(z) - q_{h_1}(z)$，由于 $q_{h_1}(z)$ 也满足 (TF) 中的方程，故得

$$\eta''(z) + c\eta'(z) + \tilde{c}(z)\eta(z) = 0,$$

其中 $\tilde{c}(z) := \begin{cases} \dfrac{f(q)-f(q_{h_1})}{q-q_{h_1}}, & \text{当 } q(z) \neq q_{h_1}(z) \text{ 时} \\ f'(q(z)), & \text{当 } q(z) = q_{h_1}(z) \text{ 时}, \end{cases}$ 是有界的，且

$$\eta(-a+h_1) > 0, \quad \eta(a) > 0, \quad \eta(z) \geqslant 0 \ (z \in [-a+h_1,a]), \quad \eta(z_3) = 0.$$

设 $|\tilde{c}| \leqslant m$，则

$$-\eta'' - c\eta' + m\eta \geqslant -\eta'' - c\eta' - \tilde{c}(z)\eta = 0.$$

因此由强极值原理可得 $\eta(z) > 0 \ (z \in [-a+h,a])$，这与上面的 $\eta(z_3) = 0$ 相矛盾，因此 $q'(z) \geqslant 0$.

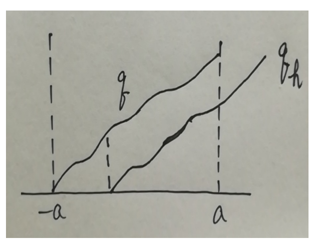

Figure 1. Sliding method

再证 $q'(z) > 0$. 事实上，对 $(\mathrm{TF})_a$ 中的方程求导可得 $\xi(z) := q'(z)$ 满足

$$\xi'' + c\xi' + f'(q(z))\xi = 0, \quad z \in [-a,a].$$

再由强极值原理可得 $\xi(z) > 0 \ (z \in (-a,a))$. 在端点 $z = \pm a$ 处利用 Hopf 引理也可以证明 $q'(\pm a) > 0$.

下面再用滑动法证明 q 的唯一性. 假设 $(\mathrm{TF})_a$有两个解 q_1, q_2. 对任何 $h \in [0,2a)$，令 $q_{2,h} = q_2(z-h) \ (z \in [-a+h,a+h])$. 类似于上面的方法用滑动法比较 $q_{2,h}$ 与 q_1 可得 $q_1 \equiv q_2$.

(ii). **$q_{a,c}(z)$ 关于 c 的单增性**. 设 $c_1 < c_2$，相应的 $(\mathrm{TF})_a$ 的解记为 q_1, q_2，则

$$0 = q_1'' + c_1 q_1' + f(q_1) \leqslant q_1'' + c_2 q_1' + f(q_1).$$

故对于 $c=c_2$ 的方程而言，q_1 是下解. 再由上下解方法可得关于 $c=c_2$ 的方程的一个解 $\tilde{q}$ 满足 $q_1(z)\leqslant\tilde{q}(z)\leqslant 1$ $(z\in[-a,a])$. 由强极值原理和上面证明的唯一性结论可得

$$q_1(z)<\tilde{q}(z)\equiv q_2(z),\ z\in(-a,a).$$

于是 $c\mapsto q_{a,c}(z)$ 对任何给定的 $z\in(-a,a)$ 都是严格单增的.

$q_{a,c}(z)$ 关于 c 的连续性. 设 q_1, q_2 如上所述，则 $\zeta(z):=q_2(z)-q_1(z)$ 满足

$$\zeta''+c_1\zeta'+\tilde{c}(z)\zeta=(c_1-c_2)q_2',\quad \zeta(\pm a)=0.$$

由椭圆方程的 Schauder 估计可知 $\|\zeta\|_{C([-a,a])}\leqslant C|c_1-c_2|$，故 $q_{a,c}$ 关于 c 是连续的.

$q_{a,c}(z)$ 的极限. 下证对于任何 $z\in(-a,a)$，当 $c\to-\infty$ 时有 $q_{a,c}(z)\to 0$, 而当 $c\to+\infty$ 时有 $q_{a,c}(z)\to 1$. 我们用反证法证明后者（前者类似可证），设存在 $z_0\in(-a,a)$, $\varepsilon>0$ 使得

$$q_{a,c}(z_0)\leqslant 1-\varepsilon,\quad \forall\ c\gg 1. \tag{3.2}$$

取定 $z_1\in(-a,z_0)$，那么，无论对多么大的 c，总存在 $z_c\in(-a,z_1)$ 使得 $q'(z_c)<\frac{1}{z_1+a}$（否则，$q'(z)\geqslant\frac{1}{z_1+a}$ $(z\in(-a,z_1))$，在 $[-a,z_1]$ 上积分即得矛盾）. 设 $|f(u)|\leq M$ $(u\in[0,1])$，取 c 充分大使得

$$\frac{M}{c}+\frac{1}{z_1+a}e^{c(z_1-z_0)}<\frac{\varepsilon}{a-z_0}. \tag{3.3}$$

由 q 的方程可得

$$-M\leqslant q''+cq'=-f(q)\leqslant M,\quad z\in[-a,a],$$

或

$$-Me^{cz}\leqslant(q'e^{cz})'\leqslant Me^{cz},\quad z\in[-a,a]. \tag{3.4}$$

将此不等式在 $[z_c,z]$ $(\forall\ z\in[z_0,a])$ 上积分有

$$q'(z)\leqslant q'(z_c)e^{c(z_c-z)}+\frac{M}{c}<\frac{1}{z_1+a}e^{c(z_1-z_0)}+\frac{M}{c}<\frac{\varepsilon}{a-z_0},\quad \forall\ z\in[z_0,a].$$

再在 $[z_0,a]$ 上积分有

$$1-q(z_0)<\varepsilon,$$

与 (3.2)矛盾.

由以上结论即可证明(ii). □

接下来我们讨论参数 c 的取值范围. 记

$$m:=\sup_{0<u\leqslant 1}\frac{f(u)}{u}.$$

引理 3.2 (c 的下界)**.** 对任何 $\delta>0$, 存在 $A>0$ 使得当 $a\geqslant A$ 时，上述引理中所得的 c 满足 $c\geqslant -2\sqrt{m}-\delta$.

证明: 用反证法，设 $c<-2\sqrt{m}-\delta$. 考虑如下问题

$$\begin{cases} -q''-cq'-mq=0, & z\in(-a,a) \\ q(-a)=0,\ q(a)=1. \end{cases} \tag{3.5}$$

记 $r_\pm$ 为 $r^2+cr+m=0$ 的两个正实根，则

$$q(z)=\frac{e^{r_+(z+a)}-e^{r_-(z+a)}}{e^{2r_+a}-e^{2r_-a}},\quad q(0)=\frac{1}{e^{r_+a}+e^{r_-a}}\to 0\quad (\text{当 } a\to\infty \text{ 时}).$$

断言. 当 $|c|>2\sqrt{m}$ 时，对任何充分大的 $a\gg 1$，算子 $L=-\partial_x^2-c\partial_x-m$ 满足极值原理. 事实上，利用 Liouville 变换 $q=e^{-\frac{cx}{2}}p(x)$, $Lq=\lambda q$ 化为

$$-\partial_x^2 p+\left(\frac{c^2}{4}-m\right)p=\lambda p.$$

在边界条件 $q(\pm a)=0$ 之下此问题的主特征值为 $\lambda_1=\frac{c^2}{4}-m+\frac{\pi^2}{4a^2}$, 当 $a\gg 1$ 时有 $\lambda_1>0$. 因此断言成立.

因此，q 是 $(\mathrm{TF})_a$的上解，当 $a\gg 1$ 时由上下解方法可得 $q(z)\geqslant q_{a,c}(z)$，从而 $q_{a,c}(0)<q(0)<\theta$，矛盾. □

引理 3.3 (c 的上界)**.** 对任何 $\delta'>0$, 存在 $A>0$ 使得当 $a\geqslant A$ 时，上述引理中所得的 c 满足 $c\leqslant 2\sqrt{m'}+\delta'$，其中 $m'=\sup\limits_{0<u\leqslant 1}\frac{-f(1-u)}{u}$.

证明: 设 $\hat{q}(z):=1-q(-z)$，则

$$\begin{cases} -\hat{q}''+c\hat{q}'+f(1-\hat{q})=0, & z\in(-a,a), \\ \hat{q}(-a)=0,\ \hat{q}(a)=1. \end{cases} \tag{3.6}$$

利用上一个引理即可得结论. □

3.2. **实轴 $\mathbb{R}$ 上的行波解.**

3.2.1. **行波解的存在性.** 上一节对于任何 $a>1$，我们得到 $(\mathrm{TF})_a$ 的解 $(c,q_{a,c})$, $q_{a,c}(0)=\theta$，以及

$$-2\sqrt{m}\leqslant c\leqslant 2\sqrt{m'},\quad \text{当 } a\to+\infty \text{ 时}.$$

因此，存在 a 的一个列 $\{a_n\}$ $(a_n\to\infty)$，一个 $c\in[-2\sqrt{m},2\sqrt{m'}]$ 以及一个函数 $q\in C^2(\mathbb{R})$ 使得当 $n\to\infty$ 时有

$$q_{a_n,c(a_n)}(z)\to q(z)\ (\text{在 } C^2_{loc}(\mathbb{R}) \text{ 拓扑下}),\quad c(a_n)\to c.$$

这样就可得 (TF) 的一个解 q，它满足

$$q'(z) \geqslant 0, \quad q(0) = \theta.$$

接下来我们研究单稳、双稳、燃烧等情况下行波解的进一步性质.

3.2.2. **单稳态情形.** 由于 $q'(z) \geqslant 0$，故 $h_{\pm} := q(\pm\infty) \in [0,1]$ 存在. 我们用反正法证明 $h_+ = 1$, $h_- = 0$. 若 $h_+ < 1$，那么有两种可能：(1) 存在 $z_n \to +\infty$ 使得 $q'(z_n) = 0$，从而 z_n 为 q' 的局部极小点，这与方程 $q''(z_n) = -f(q(z_n)) < 0$ 矛盾（这里的证明也蕴含了 $q_c'(z) > 0$）；(2) $q''(z) < 0$，$q'(z) \to 0$ $(z \to +\infty)$. 此时由方程还是可以得到 $q''(+\infty) = -f(h_+) < 0$，矛盾. 因此 $q(+\infty) = 1$，$q(-\infty) = 0$.

引理 3.4. *若对某个 c，(TF) 有解 q_c，那么对任何 $c_1 < c$，(TF) 也有解 q_{c_1}.*

证明: 显然 q_c 是关于 $c = c_1$ 的方程的上解，$q_c'(z) > 0$. 对于任何 $r \in \mathbb{R}$，考虑

$$\begin{cases} \eta'' + c_1\eta' + f(\eta) = 0, & z \in (-a, a), \\ \eta(-a) = q_c(-a+r), & \eta(a) = q_c(a+r). \end{cases} \tag{3.7}$$

易知，$q_c(z+r)$ 是它的上解，$q_c(-a+r)$ 是它的常数下解. 因此，由上下解方法可知此问题存在一个解 $\eta(z)$ 满足

$$q_c(-a+r) < \eta(z) < q_c(z+r), \quad z \in (-a, a).$$

类似于前面使用滑动法（参见[3]）得出 η 是唯一的且 $\eta'(z) > 0$. 由 q_c 的性质知道，存在唯一 r 使得 $\eta(0) = \theta$. 这样我们就得到 (3.7) 满足 $\eta(0) = \theta$ 的解. 接着再延展 a 取极限就可得 $c = c_1$ 时方程 (TF) 的解. $\square$

引理 3.5. *(i) 如果 (TF) 有解，那么 $c < 0$;*

(ii) 记 $S = \{c \in \mathbb{R} \mid \text{(TF)对此 } c \text{ 有解}\}$，那么 S 是闭的.

证明: (i) 方程两边同乘以 q' 并在 $\mathbb{R}$ 上积分即可得到.

(ii) 若 (c_n, q_n) 是解，取极限可知 $c_n \to c_*$, $q_n \to q_*$ 也是解. $\square$

本段最后讨论 Fisher-KPP 情形，证明其最大波速为 $c_* = -2\sqrt{f'(0)}$. 由前面的引理可知

$$\varliminf_{a\to+\infty} c_a \geqslant -2\sqrt{m} \geqslant -2\sqrt{f'(0)}.$$

因此，$c_* \geqslant -2\sqrt{f'(0)}$. 下面用反证法证明对于任何 $\hat{c} \in (-2\sqrt{f'(0)}, 0)$，(TF) 无解，由此即可得 $c_* = -2\sqrt{f'(0)}$. 对于充分小的 $0 < \delta \ll 1$ 我们有$\hat{c}^2 < 4(f'(0) - \delta)$， 且存在 $A > 0$ 使得

$$q'' + \hat{c}q' + (f'(0) - \delta)q \leqslant 0 \quad (\forall\ z \leqslant -A).$$

考虑

$$\eta'' + \hat{c}\eta' + (f'(0) - \delta)\eta = 0. \tag{3.8}$$

其解为

$$\eta(z) = C_1 e^{(\alpha+i\beta)z} + C_2 e^{(\alpha-i\beta)z}, \qquad \alpha = -\frac{\hat{c}}{2},\ \beta = \frac{\sqrt{4(f'(0)-\delta) - \hat{c}^2}}{2}.$$

取

$$\eta(z) = \varepsilon e^{\alpha(z-A)} \sin(\beta z - \beta A + \pi) > 0, \quad z \in \left(A - \frac{\pi}{\beta}, A\right),$$

则它满足 (3.8) 且 $\eta(A) = \eta\left(A - \frac{\pi}{\beta}\right) = 0$.

q 是 (3.8)的上解，取 $\varepsilon \ll 1$ 使得 $\eta < q$，然后将 η 向左滑动为 $\eta(z+l)$ $(l > 0)$ 直到与 q 相碰为止，由极值原理可得矛盾. 综上可知，$c_* = -2\sqrt{f'(0)}$.

注: 对一般单稳态问题可证 $\lim\limits_{a\to\infty} c_k = c_*$.

3.2.3. **双稳态问题.** 与前面类似地，通过研究 $(\mathrm{TF})_a$ 得到解 (c_a, q_a) 满足

$$q_a'(z) > 0, \quad q_a(0) = \theta, \quad -2\sqrt{m} - \delta \leqslant c_a \leqslant 2\sqrt{m'} + \delta\ (\forall\ \delta > 0,\ a \gg 1).$$

令 $a \to +\infty$ 取极限可得 (TF) 之解 (c, q):

$$\begin{cases} q'' + cq' + f(q) = 0, \quad z \in \mathbb{R}, \\ q(0) = \theta,\ q'(z) \geqslant 0,\ 0 < q(z) < 1\ (z \in \mathbb{R}). \end{cases} \tag{3.9}$$

下面我们进一步证明如上得到的 (c, q) 就是 (TF) 的解.

引理 3.6. (TF) *存在解.*

证明: 如果能证明 $q \not\equiv \theta$，那么可以与上一节相仿得到 $q(-\infty) = 0,\ q(+\infty) = 1,$ 从而就可以得到解的存在性. 我们将通过 $q_a'(0) \not\to 0$ $(a \to +\infty)$ 证明 $q'(0) \neq 0$，从而得到 $q \not\equiv \theta$.

先证明一个辅助结论：存在 $\delta > 0$ 使得对任何 $a \geqslant 1$ 有 $\int_0^a f(q_a(z))dz \geqslant \delta$. 事实上，由椭圆方程的先验估计可知 $\|q_a'\|_{L^\infty([-a,a])} \leqslant C$ （与 a 无关），于是

$$C\int_0^a f(q_a(z))dz \geqslant \int_0^a f(q_a(z))q_a'(z)dz = \int_\theta^1 f(s)ds = const. > 0.$$

利用这个辅助结论，对 $(\mathrm{TF})_a$ 中的方程在 $[0, a]$ 上积分有

$$\delta \leqslant \int_0^a f(q_a(z))dz = q_a'(0) - q_a'(a) - c_a(1-\theta) \leqslant q_a'(0) - c(1-\theta).$$

故 $q_a'(0) \geqslant \delta + c_a(1-\theta)$. 类似地，在区间 $[-a, 0]$ 上积分，并利用 $f(q_a) \leqslant 0$ 可得 $q_a'(0) \geqslant -c_a\theta$. 若 $c_a \geqslant \frac{-\delta}{2(1-\theta)}$，那么由第一个式子可得 $q_a'(0) \geqslant \frac{\delta}{2}$；若 $c_a < \frac{-\delta}{2(1-\theta)}$，那么

由第二个式子可得 $q_a'(0) \geqslant \frac{\delta\theta}{2(1-\theta)}$. 总之可得

$$q'(0) \geqslant \min\left\{\frac{\delta}{2}, \frac{\delta\theta}{2(1-\theta)}\right\}.$$

□

引理 3.7. 如果 (TF) 有解 (c, q)，那么它是唯一的.

证明: 用反证法，假设 (TF) 有两个解 (c_1, q_1), (c_2, q_2) 且 $c_1 < c_2 < 0$. 对它们的方程在 $q = 0$ 及 $q = 1$ 处线性化可得

$$\eta'' + c_i\eta' + f'(0)\eta = 0 \quad 及 \quad \zeta'' + c_i\zeta' + f'(1)\zeta = 0.$$

对应于行波的特征值为

$$\lambda_+^0(c_i) = \frac{-c_i + \sqrt{c_i^2 - 4f'(0)}}{2}, \qquad \lambda_-^1(c_i) = \frac{-c_i - \sqrt{c_i^2 - 4f'(1)}}{2}$$

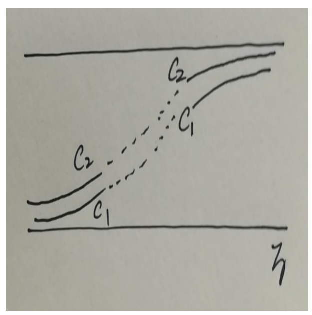

Figure 2. 行波解的衰减率

可见

$$\lambda_+^0(c_1) > \lambda_+^0(c_2) > 0, \qquad 0 > \lambda_-^1(c_1) > \lambda_-^1(c_2).$$

这说明在 $z \to -\infty$ 时，

$$q_1(z) \sim e^{\lambda_+^0(c_1)z} < q_2(z) \sim e^{\lambda_+^0(c_2)z},$$

在 $z \to +\infty$ 时，

$$1 - q_1(z) \sim e^{\lambda_-^1(c_1)z} > 1 - q_2(z) \sim e^{\lambda_-^1(c_2)z}.$$

（参见 [4, 7] 等）. 因此，取充分大的 $r > 0$ 就可得$q_2(z) > q_1(z - r)$. 接下来将 r 逐渐减小，用滑动方法就可得矛盾. 关于解 (c, q) 的唯一性，可以通过考虑方程

$$\frac{dp}{ds} + c + \frac{f(s)}{p} = 0$$

来证明.

□

3.2.4. **燃烧情形.** 与上一节类似可得 (c,q) 满足

$$\begin{cases} q''+cq'+f(q)=0, \quad z\in\mathbb{R} \\ q(0)=\theta,\ q'(z)\geqslant 0\ (z\in\mathbb{R}),\ 0<q(z)<1\ (z\in\mathbb{R}). \end{cases} \tag{3.10}$$

引理 3.8. $q'(0)>0$.

类似于前面可证.

引理 3.9. 若 (TF) 有解 (c,q), 则 $c<0$ 且解是唯一的.

证明: 由前面的引理可知

$$q'(z)>0\ (z>0) \quad \text{且} \quad q(+\infty)=1.$$

另一方面，当 $z\leqslant 0$ 时，方程为 $q''+cq'=0$ 故

$$q(z)=q'(0)e^{-cz}\to 0\ (\text{当 } z\to-\infty \text{ 时})$$

c 的唯一性类似于引理 3.7 可证.

更进一步地，可以证明如下结论:

定理 3.10. 若 f 满足

$$f(u)\leqslant 0\ (u\in[0,\theta]), \quad f(u)>0\ (u\in(\theta,1)), \quad \int_0^1 f(s)ds>0.$$

则问题 (TF) 有解 (c,q).

References

[1] D.G. Aronson and H.F. Weinberger, Multidimensional nonlinear diffusion arising in population genetics. Adv. Math.30, 33 – 76 (1978).

[2] H. Berestycki, Lectures in Reaction Diffusion Equations, Lectures in IMPA, July-13-2015 (https://www.bilibili.com/video/BV1MW41147Y5?p=1), and Lectures in HIT, July-1-2020.

[3] H. Berestycki and L. Nirenberg, On the method of moving planes and the sliding method, Bol. Soc. Brasil. Mat. (N.S.), 22 (1991), 1-37.

[4] E.A. Coddington and N. Levinson, Theory of Ordinary Differential Equations, TATA McGRAW-HILL Publishing Co. LTD. New Delhi, 1987.

[5] R.A. Fisher, The wave of advance of advantageous genes, Ann. Eugenics, 7 (1937), 335 – 369.

[6] A.N. Kolmogorov, I.G. Petrovsky and N.S. Piskunov, Etude de l'equation de la diffusion avec croissance de la quantite de matiere et son application a un probleme biologique, *Bulletin Univ. d'Etat a Moscow* (Bjul. Moskowskogo Gos. Univ.), Serie internationale, section A. 1, 1937, pp.1-26. English translation: Study of the diffusion equation with growth of the quantity of matter and its application to a biology problem. In *Dynamics of cuurved fronts*, R. Pelce ed., Perspectives in Physics Series, Academic Press, New York, 1988, pp. 105-130.

[7] 叶其孝，李正元，王明新，吴雅萍著，反应扩散方程引论（第二版），科学出版社，北京，2011 年.