

反应扩散方程的经典行波解

娄本东 (上海师范大学)

Email: lou@shnu.edu.cn

1. 引言

在弦振动、反应扩散、曲率流、KdV等类型的发展方程中,经常可以观察到行波解(traveling wave solution)的存在.传统意义上的行波解是指波形、波速都不变的一类解.在反应扩散方程领域,这类解的研究出现于1937年.另一方面,从1980年代开始,人们也大量研究了空间和/或时间非均匀环境中反应扩散方程的广义行波解.行波解虽然只是一个方程的众多解其中的一个特殊类型,但是由于它们通常具有某种稳定性,在许多情况下都表征了(无界区域中的)解演化为稳定态的中间过程,因此,在自然界和自然科学中经常被观察到,在数学上也被关注和研究.本讲义将介绍反应扩散方程传统意义下的行波解,为了与广义行波解相区别,称之为经典行波解.

考虑如下反应扩散方程

$$(E) \quad u_t = u_{xx} + f(u), \quad x \in \mathbb{R}, t > 0,$$

其中 $f(u)$ 在 $[0, \infty)$ 上是 C^1 的(可以减弱为 Lipschitz 的),又假设 $f(0) = 0$. 最典型的例子是以下三种类型,即单稳态型(monostable type,也称为 positive type):

$$(f_M) \quad \begin{cases} f(0) = f(1) = 0, & f'(0) > 0, & f'(1) < 0, \\ f(u) > 0 \ (\forall u \in (0, 1)), & f(u) < 0 \ (\forall u > 1); \end{cases}$$

双稳态型(bistable type): 存在 $\theta \in (0, 1)$ 使得

$$(f_B) \quad \begin{cases} f(0) = f(\theta) = f(1) = 0, & f'(0) < 0, & f'(1) < 0, & \int_0^1 f(s) ds > 0, \\ f(u) < 0 \ (\forall u \in (0, \theta) \cup (1, \infty)), & f(u) > 0 \ (\forall u \in (\theta, 1)); \end{cases}$$

燃烧型(combustion or ignition type): 存在 $\theta \in (0, 1)$ 使得

$$(f_C) \quad \begin{cases} f(u) = 0 \ (\forall u \in [0, \theta]), & f'(1) < 0, \\ f(u) > 0 \ (\forall u \in (\theta, 1)), & f(u) < 0 \ (\forall u > 1). \end{cases}$$

在单稳态型中又有一类特殊的所谓 Fisher-KPP 型,即 f 还满足:

$$(F-KPP) \quad f(u) \leq f'(0)u \ (\forall u \geq 0), \quad \text{或} \quad \frac{f(u)}{u} \text{ 关于 } u > 0 \text{ 是单调递减的.}$$

(此名称的由来是因为 Fisher [5] 和 Kolmogorov 等人[6] 于1937年最早研究了这类问题).

除了以上这些典型的非线性项, 近年来也有许多研究是关于多稳态、时间和/或空间非均匀反应项的, 本讲义只考虑上述几种最典型最简单的反应项, 而且只介绍行波解的问题.

经典行波解是方程 (E) 的形如 $u(x, t) = q(x - ct)$ 的解. 因此, 一个充分必要条件是 (c, q) 满足如下常微分方程:

$$(TWE) \quad q''(z) + cq'(z) + f(q) = 0, \quad z \in \mathbb{R}.$$

此外, 为了表达行波解连接两个特定的平衡态, 通常需要附加 q 在 $\pm\infty$ 处的边界条件, 如:

$$(TWBC) \quad q(-\infty) = 0, \quad q(+\infty) = 1.$$

本讲义介绍研究行波解的两个方法: 相平面法和打靶法(前者主要取材于 [1, 7] 等, 后者主要取材于 H. Berestycki 的报告 [2]).

2. 相平面方法

写作中

3. 打靶法

草稿

 本节利用打靶法构造行波解. 考虑前面的问题 (TWE)-(TWBC):

$$(TF) \quad \begin{cases} q''(z) + cq'(z) + f(q) = 0, & z \in \mathbb{R}, \\ q(-\infty) = 0, \quad q(+\infty) = 1. \end{cases}$$

3.1. 有限区间上的问题. 取 $a \geq 1$, 考虑区间 $[-a, a]$ 上的问题

$$(TF)_a \quad \begin{cases} q''(z) + cq'(z) + f(q) = 0, & z \in [-a, a], \\ q(-a) = 0, \quad q(a) = 1. \end{cases}$$

引理 3.1. (i) 对于任何 $c \in \mathbb{R}$, 问题 $(TF)_a$ 存在唯一解 $q = q_{a,c}$, 它满足 $0 < q < 1$, $q' > 0$;

(ii) $q_{a,c}(z)$ 关于 c 是单调增加且连续的, 而且存在唯一的 $c = c(a)$ 使得 $q_{a,c}(0) = \theta$ (对单稳情形记 $\theta = \frac{1}{2}$).

证明: (i). 显然 $q \equiv 1$ 为问题 $(TF)_a$ 的上解, $q \equiv 0$ 为其下解, 由经典的上下解方法 (例如: [7, 定理 2.3.2]) 可得 q 的存在性, 结合极值原理可得 $0 < q(z) < 1$ ($z \in (-a, a)$).

下面用滑动法 (sliding method) 证明单调性 (参见[3]). 设 $q(z)$ 是 $(TF)_a$ 的一个解, 对任何 $h \in [0, 2a)$, 考虑 $q(z)$ 的平移函数 $q_h(z) := q(z-h)$, 它定义于 $[-a+h, a+h]$,

与 $q(z)$ 有公共定义域 $[-a + h, a]$. 显然当 $2a - h > 0$ 充分小时, 有

$$(3.1) \quad q_h(z) < q(z), \quad z \in [-a + h, a].$$

先证明 $q' \geq 0$. 否则就存在 $z_1 < z_2$, 使得 $q(z_1) > q(z_2)$. 于是在保持 (3.1) 成立而逐渐减小 h 的滑动过程中, 必存在 $h_1 > 0$ 使得 $q_{h_1}(z) \leq q(z)$ 且等号在某一点 z_3 处成立, 由椭圆方程的极值原理即得矛盾. 具体地说, 令 $\eta(z) := q(z) - q_{h_1}(z)$, 由于 $q_{h_1}(z)$ 也满足 (TF) 中的方程, 故得

$$\eta''(z) + c\eta'(z) + \tilde{c}(z)\eta(z) = 0,$$

$$\text{其中 } \tilde{c}(z) := \begin{cases} \frac{f(q) - f(q_{h_1})}{q - q_{h_1}}, & \text{当 } q(z) \neq q_{h_1}(z) \text{ 时} \\ f'(q(z)), & \text{当 } q(z) = q_{h_1}(z) \text{ 时,} \end{cases} \quad \text{是有界的, 且}$$

$$\eta(-a + h_1) > 0, \quad \eta(a) > 0, \quad \eta(z) \geq 0 \quad (z \in [-a + h_1, a]), \quad \eta(z_3) = 0.$$

设 $|\tilde{c}| \leq m$, 则

$$-\eta'' - c\eta' + m\eta \geq -\eta'' - c\eta' - \tilde{c}(z)\eta = 0.$$

因此由强极值原理可得 $\eta(z) > 0$ ($z \in [-a + h, a]$), 这与上面的 $\eta(z_3) = 0$ 相矛盾, 因此 $q'(z) \geq 0$.

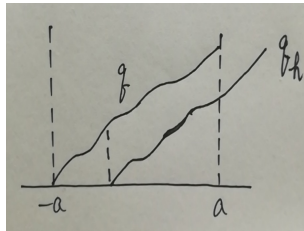


FIGURE 1. Sliding method

再证 $q'(z) > 0$. 事实上, 对 $(\text{TF})_a$ 中的方程求导可得 $\xi(z) := q'(z)$ 满足

$$\xi'' + c\xi' + f'(q(z))\xi = 0, \quad z \in [-a, a].$$

再由强极值原理可得 $\xi(z) > 0$ ($z \in (-a, a)$). 在端点 $z = \pm a$ 处利用 Hopf 引理也可以证明 $q'(\pm a) > 0$.

下面再用滑动法证明 q 的唯一性. 假设 $(\text{TF})_a$ 有两个解 q_1, q_2 . 对任何 $h \in [0, 2a)$, 令 $q_{2,h} = q_2(z - h)$ ($z \in [-a + h, a + h]$). 类似于上面的方法用滑动法比较 $q_{2,h}$ 与 q_1 可得 $q_1 \equiv q_2$.

(ii). $q_{a,c}(z)$ 关于 c 的单增性. 设 $c_1 < c_2$, 相应的 $(\text{TF})_a$ 的解记为 q_1, q_2 , 则

$$0 = q_1'' + c_1 q_1' + f(q_1) \leq q_1'' + c_2 q_1' + f(q_1).$$

故对于 $c = c_2$ 的方程而言, q_1 是下解. 再由上下解方法可得关于 $c = c_2$ 的方程的一个解 \tilde{q} 满足 $q_1(z) \leq \tilde{q}(z) \leq 1$ ($z \in [-a, a]$). 由强极值原理和上面证明的唯一性结论可得

$$q_1(z) < \tilde{q}(z) \equiv q_2(z), \quad z \in (-a, a).$$

于是 $c \mapsto q_{a,c}(z)$ 对任何给定的 $z \in (-a, a)$ 都是严格单增的.

$q_{a,c}(z)$ 关于 c 的连续性. 设 q_1, q_2 如上所述, 则 $\zeta(z) := q_2(z) - q_1(z)$ 满足

$$\zeta'' + c_1\zeta' + \tilde{c}(z)\zeta = (c_1 - c_2)q_2', \quad \zeta(\pm a) = 0.$$

由椭圆方程的 Schauder 估计可知 $\|\zeta\|_{C([-a,a])} \leq C|c_1 - c_2|$, 故 $q_{a,c}$ 关于 c 是连续的.

$q_{a,c}(z)$ 的极限. 下证对于任何 $z \in (-a, a)$, 当 $c \rightarrow -\infty$ 时有 $q_{a,c}(z) \rightarrow 0$, 而当 $c \rightarrow +\infty$ 时有 $q_{a,c}(z) \rightarrow 1$. 我们用反证法证明后者 (前者类似可证), 设存在 $z_0 \in (-a, a)$, $\varepsilon > 0$ 使得

$$(3.2) \quad q_{a,c}(z_0) \leq 1 - \varepsilon, \quad \forall c \gg 1.$$

取定 $z_1 \in (-a, z_0)$, 那么, 无论对多么大的 c , 总存在 $z_c \in (-a, z_1)$ 使得 $q'(z_c) < \frac{1}{z_1+a}$ (否则, $q'(z) \geq \frac{1}{z_1+a}$ ($z \in (-a, z_1)$), 在 $[-a, z_1]$ 上积分即得矛盾). 设 $|f(u)| \leq M$ ($u \in [0, 1]$), 取 c 充分大使得

$$(3.3) \quad \frac{M}{c} + \frac{1}{z_1+a} e^{c(z_1-z_0)} < \frac{\varepsilon}{a-z_0}.$$

由 q 的方程可得

$$-M \leq q'' + cq' = -f(q) \leq M, \quad z \in [-a, a],$$

或

$$(3.4) \quad -Me^{cz} \leq (q'e^{cz})' \leq Me^{cz}, \quad z \in [-a, a].$$

将此不等式在 $[z_c, z]$ ($\forall z \in [z_0, a]$) 上积分有

$$q'(z) \leq q'(z_c)e^{c(z_c-z)} + \frac{M}{c} < \frac{1}{z_1+a} e^{c(z_1-z_0)} + \frac{M}{c} < \frac{\varepsilon}{a-z_0}, \quad \forall z \in [z_0, a].$$

再在 $[z_0, a]$ 上积分有

$$1 - q(z_0) < \varepsilon,$$

与 (3.2) 矛盾.

由以上结论即可证明(ii). □

接下来我们讨论参数 c 的取值范围. 记

$$m := \sup_{0 < u \leq 1} \frac{f(u)}{u}.$$

引理 3.2 (c 的下界). 对任何 $\delta > 0$, 存在 $A > 0$ 使得当 $a \geq A$ 时, 上述引理中所得的 c 满足 $c \geq -2\sqrt{m} - \delta$.

证明: 用反证法, 设 $c < -2\sqrt{m} - \delta$. 考虑如下问题

$$(3.5) \quad \begin{cases} -q'' - cq' - mq = 0, & z \in (-a, a) \\ q(-a) = 0, \quad q(a) = 1. \end{cases}$$

记 r_{\pm} 为 $r^2 + cr + m = 0$ 的两个正实根, 则

$$q(z) = \frac{e^{r_+(z+a)} - e^{r_-(z+a)}}{e^{2r_+a} - e^{2r_-a}}, \quad q(0) = \frac{1}{e^{r_+a} + e^{r_-a}} \rightarrow 0 \quad (\text{当 } a \rightarrow \infty \text{ 时}).$$

断言. 当 $|c| > 2\sqrt{m}$ 时, 对任何充分大的 $a \gg 1$, 算子 $L = -\partial_x^2 - c\partial_x - m$ 满足极值原理. 事实上, 利用 Liouville 变换 $q = e^{-\frac{cx}{2}}p(x)$, $Lq = \lambda q$ 化为

$$-\partial_x^2 p + \left(\frac{c^2}{4} - m \right) p = \lambda p.$$

在边界条件 $q(\pm a) = 0$ 之下此问题的主特征值为 $\lambda_1 = \frac{c^2}{4} - m + \frac{\pi^2}{4a^2}$, 当 $a \gg 1$ 时有 $\lambda_1 > 0$. 因此断言成立.

因此, q 是 $(\text{TF})_a$ 的上解, 当 $a \gg 1$ 时由上下解方法可得 $q(z) \geq q_{a,c}(z)$, 从而 $q_{a,c}(0) < q(0) < \theta$, 矛盾. \square

引理 3.3 (c 的上界). 对任何 $\delta' > 0$, 存在 $A > 0$ 使得当 $a \geq A$ 时, 上述引理中所得的 c 满足 $c \leq 2\sqrt{m'} + \delta'$, 其中 $m' = \sup_{0 < u \leq 1} \frac{-f(1-u)}{u}$.

证明: 设 $\hat{q}(z) := 1 - q(-z)$, 则

$$(3.6) \quad \begin{cases} -\hat{q}'' + c\hat{q}' + f(1 - \hat{q}) = 0, & z \in (-a, a), \\ \hat{q}(-a) = 0, \quad \hat{q}(a) = 1. \end{cases}$$

利用上一个引理即可得结论. \square

3.2. 实轴 \mathbb{R} 上的行波解.

3.2.1. 行波解的存在性. 上一节对于任何 $a > 1$, 我们得到 $(\text{TF})_a$ 的解 $(c, q_{a,c})$, $q_{a,c}(0) = \theta$, 以及

$$-2\sqrt{m} \leq c \leq 2\sqrt{m'}, \quad \text{当 } a \rightarrow +\infty \text{ 时.}$$

因此, 存在 a 的一个列 $\{a_n\}$ ($a_n \rightarrow \infty$), 一个 $c \in [-2\sqrt{m}, 2\sqrt{m'}]$ 以及一个函数 $q \in C^2(\mathbb{R})$ 使得当 $n \rightarrow \infty$ 时有

$$q_{a_n, c(a_n)}(z) \rightarrow q(z) \quad (\text{在 } C_{loc}^2(\mathbb{R}) \text{ 拓扑下}), \quad c(a_n) \rightarrow c.$$

这样就可得 (TF) 的一个解 q , 它满足

$$q'(z) \geq 0, \quad q(0) = \theta.$$

接下来我们研究单稳、双稳、燃烧等情况下行波解的进一步性质.

3.2.2. 单稳态情形. 由于 $q'(z) \geq 0$, 故 $h_{\pm} := q(\pm\infty) \in [0, 1]$ 存在. 我们用反正法证明 $h_+ = 1, h_- = 0$. 若 $h_+ < 1$, 那么有两种可能: (1) 存在 $z_n \rightarrow +\infty$ 使得 $q'(z_n) = 0$, 从而 z_n 为 q' 的局部极小点, 这与方程 $q''(z_n) = -f(q(z_n)) < 0$ 矛盾 (这里的证明也蕴含了 $q'_c(z) > 0$); (2) $q''(z) < 0, q'(z) \rightarrow 0 (z \rightarrow +\infty)$. 此时由方程还是可以得到 $q''(+\infty) = -f(h_+) < 0$, 矛盾. 因此 $q(+\infty) = 1, q(-\infty) = 0$.

引理 3.4. 若对某个 c , (TF) 有解 q_c , 那么对任何 $c_1 < c$, (TF) 也有解 q_{c_1} .

证明: 显然 q_c 是关于 $c = c_1$ 的方程的上解, $q'_c(z) > 0$. 对于任何 $r \in \mathbb{R}$, 考虑

$$(3.7) \quad \begin{cases} \eta'' + c_1 \eta' + f(\eta) = 0, & z \in (-a, a), \\ \eta(-a) = q_c(-a+r), \quad \eta(a) = q_c(a+r). \end{cases}$$

易知, $q_c(z+r)$ 是它的上解, $q_c(-a+r)$ 是它的常数下解. 因此, 由上下解方法可知此问题存在一个解 $\eta(z)$ 满足

$$q_c(-a+r) < \eta(z) < q_c(z+r), \quad z \in (-a, a).$$

类似于前面使用滑动法 (参见[3]) 得出 η 是唯一的且 $\eta'(z) > 0$. 由 q_c 的性质知道, 存在唯一 r 使得 $\eta(0) = \theta$. 这样我们就得到 (3.7) 满足 $\eta(0) = \theta$ 的解. 接着再延展 a 取极限就可得 $c = c_1$ 时方程 (TF) 的解. \square

引理 3.5. (i) 如果 (TF) 有解, 那么 $c < 0$;

(ii) 记 $S = \{c \in \mathbb{R} \mid \text{(TF) 对此 } c \text{ 有解}\}$, 那么 S 是闭的.

证明: (i) 方程两边同乘以 q' 并在 \mathbb{R} 上积分即可得到.

(ii) 若 (c_n, q_n) 是解, 取极限可知 $c_n \rightarrow c_*, q_n \rightarrow q_*$ 也是解. \square

本段最后讨论 Fisher-KPP 情形, 证明其最大波速为 $c_* = -2\sqrt{f'(0)}$. 由前面的引理可知

$$\liminf_{a \rightarrow +\infty} c_a \geq -2\sqrt{m} \geq -2\sqrt{f'(0)}.$$

因此, $c_* \geq -2\sqrt{f'(0)}$. 下面用反证法证明对于任何 $\hat{c} \in (-2\sqrt{f'(0)}, 0)$, (TF) 无解, 由此即可得 $c_* = -2\sqrt{f'(0)}$. 对于充分小的 $0 < \delta \ll 1$ 我们有 $\hat{c}^2 < 4(f'(0) - \delta)$, 且存在 $A > 0$ 使得

$$q'' + \hat{c}q' + (f'(0) - \delta)q \leq 0 \quad (\forall z \leq -A).$$

考虑

$$(3.8) \quad \eta'' + \hat{c}\eta' + (f'(0) - \delta)\eta = 0.$$

其解为

$$\eta(z) = C_1 e^{(\alpha+i\beta)z} + C_2 e^{(\alpha-i\beta)z}, \quad \alpha = -\frac{\hat{c}}{2}, \quad \beta = \frac{\sqrt{4(f'(0) - \delta) - \hat{c}^2}}{2}.$$

取

$$\eta(z) = \varepsilon e^{\alpha(z-A)} \sin(\beta z - \beta A + \pi) > 0, \quad z \in \left(A - \frac{\pi}{\beta}, A\right),$$

则它满足 (3.8) 且 $\eta(A) = \eta\left(A - \frac{\pi}{\beta}\right) = 0$.

q 是 (3.8) 的上解, 取 $\varepsilon \ll 1$ 使得 $\eta < q$, 然后将 η 向左滑动为 $\eta(z+l)$ ($l > 0$) 直到与 q 相碰为止, 由极值原理可得矛盾. 综上可知, $c_* = -2\sqrt{f'(0)}$.

注: 对一般单稳态问题可证 $\lim_{a \rightarrow \infty} c_k = c_*$.

3.2.3. **双稳态问题.** 与前面类似地, 通过研究 $(TF)_a$ 得到解 (c_a, q_a) 满足

$$q'_a(z) > 0, \quad q_a(0) = \theta, \quad -2\sqrt{m} - \delta \leq c_a \leq 2\sqrt{m} + \delta \quad (\forall \delta > 0, a \gg 1).$$

令 $a \rightarrow +\infty$ 取极限可得 (TF) 之解 (c, q) :

$$(3.9) \quad \begin{cases} q'' + cq' + f(q) = 0, & z \in \mathbb{R}, \\ q(0) = \theta, \quad q'(z) \geq 0, \quad 0 < q(z) < 1 & (z \in \mathbb{R}). \end{cases}$$

下面我们进一步证明如上得到的 (c, q) 就是 (TF) 的解.

引理 3.6. (TF) 存在解.

证明: 如果能证明 $q \not\equiv \theta$, 那么可以与上一节相仿得到 $q(-\infty) = 0$, $q(+\infty) = 1$, 从而可以得到解的存在性. 我们将通过 $q'_a(0) \not\rightarrow 0$ ($a \rightarrow +\infty$) 证明 $q'(0) \neq 0$, 从而得到 $q \not\equiv \theta$.

先证明一个辅助结论: 存在 $\delta > 0$ 使得对任何 $a \geq 1$ 有 $\int_0^a f(q_a(z))dz \geq \delta$. 事实上, 由椭圆方程的先验估计可知 $\|q'_a\|_{L^\infty([-a,a])} \leq C$ (与 a 无关), 于是

$$C \int_0^a f(q_a(z))dz \geq \int_0^a f(q_a(z))q'_a(z)dz = \int_\theta^1 f(s)ds = \text{const.} > 0.$$

利用这个辅助结论, 对 $(TF)_a$ 中的方程在 $[0, a]$ 上积分有

$$\delta \leq \int_0^a f(q_a(z))dz = q'_a(0) - q'_a(a) - c_a(1 - \theta) \leq q'_a(0) - c(1 - \theta).$$

故 $q'_a(0) \geq \delta + c_a(1 - \theta)$. 类似地, 在区间 $[-a, 0]$ 上积分, 并利用 $f(q_a) \leq 0$ 可得 $q'_a(0) \geq -c_a\theta$. 若 $c_a \geq \frac{-\delta}{2(1-\theta)}$, 那么由第一个式子可得 $q'_a(0) \geq \frac{\delta}{2}$; 若 $c_a < \frac{-\delta}{2(1-\theta)}$, 那么

由第二个式子可得 $q'_a(0) \geq \frac{\delta\theta}{2(1-\theta)}$. 总之可得

$$q'(0) \geq \min \left\{ \frac{\delta}{2}, \frac{\delta\theta}{2(1-\theta)} \right\}.$$

□

引理 3.7. 如果 (TF) 有解 (c, q) , 那么 c 是唯一的.

证明: 用反证法, 假设 (TF) 有两个解 $(c_1, q_1), (c_2, q_2)$ 且 $c_1 < c_2 < 0$. 对它们的方程在 $q = 0$ 及 $q = 1$ 处线性化可得

$$\eta'' + c_i \eta' + f'(0)\eta = 0 \quad \text{及} \quad \zeta'' + c_i \zeta' + f'(1)\zeta = 0.$$

对应于行波的特征值为

$$\lambda_+^0(c_i) = \frac{-c_i + \sqrt{c_i^2 - 4f'(0)}}{2}, \quad \lambda_-^1(c_i) = \frac{-c_i - \sqrt{c_i^2 - 4f'(1)}}{2}$$

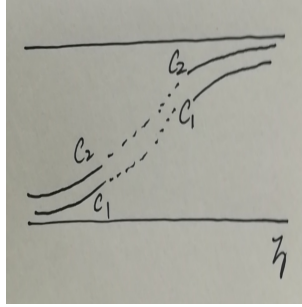


FIGURE 2. 行波解的衰减率

可见

$$\lambda_+^0(c_1) > \lambda_+^0(c_2) > 0, \quad 0 > \lambda_-^1(c_1) > \lambda_-^1(c_2).$$

这说明在 $z \rightarrow -\infty$ 时,

$$q_1(z) \sim e^{\lambda_+^0(c_1)z} < q_2(z) \sim e^{\lambda_+^0(c_2)z},$$

在 $z \rightarrow +\infty$ 时,

$$1 - q_1(z) \sim e^{\lambda_-^1(c_1)z} > 1 - q_2(z) \sim e^{\lambda_-^1(c_2)z}.$$

(参见 [4, 7] 等). 因此, 取充分大的 $r > 0$ 就可得 $q_2(z) > q_1(z - r)$. 接下来将 r 逐渐减小, 用滑动方法就可得矛盾. □

3.2.4. 燃烧情形. 与上一节类似可得 (c, q) 满足

$$(3.10) \quad \begin{cases} q'' + cq' + f(q) = 0, & z \in \mathbb{R} \\ q(0) = \theta, \quad q'(z) \geq 0 \quad (z \in \mathbb{R}), \quad 0 < q(z) < 1 \quad (z \in \mathbb{R}). \end{cases}$$

引理 3.8. $q'(0) > 0$.

类似于前面可证.

引理 3.9. 若 (TF) 有解 (c, q) , 则 $c < 0$ 且是唯一的.

证明: 由前面的引理可知

$$q'(z) > 0 \quad (z > 0) \quad \text{且} \quad q(+\infty) = 1.$$

另一方面, 当 $z \leq 0$ 时, 方程为 $q'' + cq' = 0$ 故

$$q(z) = q'(0)e^{-cz} \rightarrow 0 \quad (\text{当 } z \rightarrow -\infty \text{ 时})$$

c 的唯一性类似于引理 3.7 可证.

更进一步地, 可以证明如下结论:

定理 3.10. 若 f 满足

$$f(u) \leq 0 \quad (u \in [0, \theta]), \quad f(u) > 0 \quad (u \in (\theta, 1)), \quad \int_0^1 f(s)ds > 0.$$

则问题 (TF) 有解 (c, q) .

REFERENCES

- [1] D.G. Aronson and H.F. Weinberger, Multidimensional nonlinear diffusion arising in population genetics. *Adv. Math.*30, 33 - 76 (1978).
- [2] H. Berestycki, Lectures in Reaction Diffusion Equations, Lectures in IMPA, July-13-2015 (<http://www.bilibili.com/video/BV1MW41147Y5?p=1>), and Lectures in HIT, July-1-2020.
- [3] H. Berestycki and L. Nirenberg, On the method of moving planes and the sliding method, *Bol. Soc. Brasil. Mat. (N.S.)*, 22 (1991), 1-37.
- [4] E.A. Coddington and N. Levinson, *Theory of Ordinary Differential Equations*, TATA McGRW-HILL Publishing Co. LTD. New Delhi, 1987.
- [5] R.A. Fisher, The wave of advance of advantageous genes, *Ann. Eugenics*, 7 (1937), 335 - 369.
- [6] A.N. Kolmogorov, I.G. Petrovsky and N.S. Piskunov, Etude de l'equation de la diffusion avec croissance de la quantite de matiere et son application a un probleme biologique, *Bulletin Univ. d'Etat a Moscow (Bjul. Moskowskogo Gos. Univ.)*, Serie internationale, section A. 1, 1937, pp.1-26. English translation: Study of the diffusion equation with growth of the quantity of matter and its application to a biology problem. In *Dynamics of curved fronts*, R. Pelce ed., Perspectives in Physics Series, Academic Press, New York, 1988, pp. 105-130.
- [7] 叶其孝, 李正元, 王明新, 吴雅萍著, 反应扩散方程引论 (第二版), 科学出版社, 北京, 2011年.